ＡＲＩＭＡモデル
の
歴　　　史

～　今　ARIMAモデル

が求められるのは　～

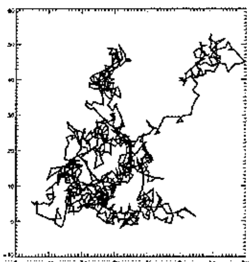
2010年9月

特定非営利活動法人　ビュー・コミュニケーションズ

ARIMA モデルの歴史

1. ARIMA モデルの源流を探ると、1827 年にイギリスの植物学者ロバート・ブラウンが発見したブラウン運動にさかのぼります。

水に浮遊する花粉を顕微鏡で観察したところ、不規則に運動していました。



長い間原因がわかりませんでしたが、1905 年、アインシュタインにより、熱運動する分子の不規則な衝突によって引き起こされる現象であることが解明されました。

一般的ブラウン運動（ウィナーの過程とも呼ばれます）を数学的に表現すれば、変動量 x は次式で表わされます。

$$dx = \alpha dt + \beta dz$$

（t : 時間、z ：分散一定のホワイトノイズ　α、β は定数）

時間的変量 x は、時間とともに変動する部分と時間に無関係に不規則変動をする部分から成ると考えていることになります。

ブラウン運動が発見されたほんの少し前、フランス革命後のナポレオンが統治していたフランスで、数学者・物理学者であるジョセフ・フーリエは「熱の解析的理論」(1822 年)を発表しました。当時のフランスの数学・物理学界はラグランジュ、ラプラス、ポアソン、オーム等多士済々で水準も高く、フーリエの解析に対し、説明力、厳密性の点が不十分であるとの指摘が出されました。

しかし、その後、複雑な周期関数をより簡単に扱うことができるため、音・光・電気など様々な分野の波動研究に広く用いられるようになって行きました。

さて、フーリエの熱伝導に関する研究は、次の様な熱伝導方程式を導き解いたことにありました。

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

（　y：温度関数、　x：座標、　t：時間　）

“各点での熱の移動する速さはその点における温度変化に比例する”ことを2階の微分方程式で表わしています。これを解く過程で、有名なフーリエ級数・フーリエ積分などの公式が導かれるようになりました。

2. 随分時がたち、1970 年に、ボックスとジェンキンス（両者ともロンドン大学で数学、統計学の Dr. を取得。ボックスは 1979 年に米国統計学会の会長に就任。）は、ブラウン運動を定差方程式の形に変えた、新しい時系列解析法を発表しました。

難しい周波数分析をより簡便に扱うことができるように工夫を凝らしたものでありました。

$$X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t$$

（ブラウン運動の時間的成分を変動量Ｘｔの自己回帰成分

Ｘｔ-1から説明しようとしている）

ほぼ同じ頃、1973 年に、ブラックとショールズ＊は派生証券価格の評価公式であるブラックショールズ方程式を発表しました。

やや複雑な形をした微分方程式ですが、実は、ブラウン運動を基礎にフーリエの熱伝導方程式で表現されたものとなっています。

（勿論、伊藤過程、キルザノフの定理など様々な経済学の研究成果が活用されています。）

$$r \cdot f(s,t) = \frac{\partial f(s,t)}{\partial t} + rs\frac{\partial f(s,t)}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s^2}$$

（s：株価、f(s,t)：時点ｔの株式派生証券の価格、r：非危険資産の利子率、σ^2：株価のボラティリティ）

＊ブラックはアメリカ人でハーバード大学応用数学の Dr. 称号を得、1995 年に没。マイロン・ショールズはカナダ生まれ、シカゴ大学で経済学の Dr.

称号を得る。

1997 年にノーベル経済学賞を受けた一方、翌年自ら立ち上げたヘッジファンド（LTCM）を空前の損失を出して倒産させた。現在スタンフォード大学教授。

ブラックショールズ方程式は、金融を国家戦略の 1 つの柱と考えていた当時のアメリカ政府の後押しもあり、世界中の多くの数学者・物理学者、経済学者がアメリカに集まり、金融工学として実業界に大きく貢献することとなりました。
一方、ボックス・ジェンキンスの理論は、ARIMA モデルの研究として進化したものの、実業界にはほとんど浸透しませんでした。
かたや微分方程式、かたや定差方程式、何故異なった進展を示したのでしょうか。

3. 多様な金融商品の開発、金融市場の国際化の進展などとも重なり、ブラックショールズ方程式に代表される金融工学は、金融市場の驚異の膨張を支えてきたと言われます。
物理学、数学、経済学のエッセンスを組み合わせた精緻化された理論という側面もあり、数学者､物理学者がこの分野に専門家として参入し、コンピューターテクノロジーの進化とも合わさり、実際に資産選択の成果（高い投資収益率実績）を挙げてきました。
このような金融工学の成果は、実体経済活動水準に必要な量をはるかに超えたマネー量をグローバルに生み出してきたとも指摘されています。そして、近年になりリーマンショック､深刻な各国の財政問題、雇用問題等、様々な経済問題を抱えるようになりました。
そのような事態を招いた原因は種々にありましょうが、その一つに、“厳密化された精緻な理論と現実との矛盾性”が指摘できると思われます。
ブラックショールズ方程式の裏側には、経済学の均衡条件、完全情報性の仮

定、合理的行動性の仮定などがあり、現実とかなりかけ離れた仮定の上での価格評価公式となっています。

例えば、派生証券価格の計算には株価の分布が与えられたものとして計算されますが、実際には分布そのものが日々変化するので、正しい計算からは乖離することになりがちです。

つまり、「現実を精緻に理論的に解明しようとすればするほど、現実から乖離した答を導き出しやすい」という矛盾を抱える危険性があるのです。

4. グローバル経済は日々ダイナミックな変化を続けており、固定化されやすい精緻な理論よりも、変化のスピードに合わせ、なるべく最適に近い答を科学的に導いた方が望ましいと考える必要が生じています。

このような考えにフィットするのが、ARIMA モデルと言えます。

つまり、厳密、精緻な経済学、物理学的構造方程式を持たず、過去の実績変動量（多くの場合単一変動量）のみを入力データとするので、扱うデータ期間を逐次にズラすことで変化への対応が容易になるという利点があります。

また、計量経済学の分野では、数多くの方程式を解くという従来型の手法よりも ARIMA モデルのほうが推定結果の当てはまりが良くなるという実証研究も報告されています。

さて、季節変動やトレンドを含めた ARIMA モデルの中核部分は、変動量 X について次のように表わされます。

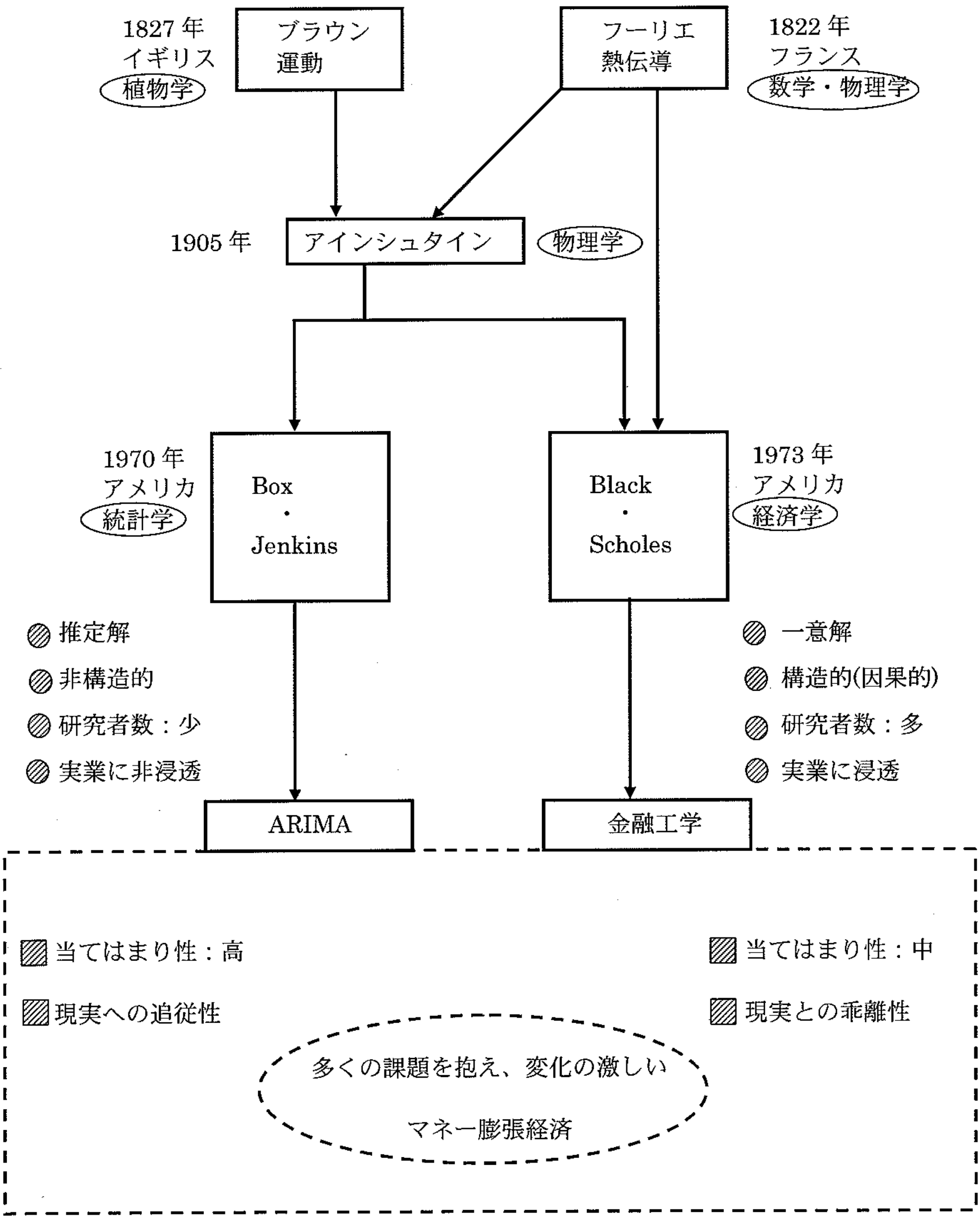
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$$

（ϕ, θ ：パラメータ、Z：分散 σ^2 のホワイトノイズ）

この方程式は、ブラウン運動の表現方法から述べると、Xt は時間とともに変動する部分（前の時点ｔ－１からｐ時点前ｔ－ｐまでの変動量に依存している部分：AR（自己回帰）部分）と時間に無関係な不規則的変動部分（Z は時間

に相関性のない誤差項で、Xt の一部はq時点前までの誤差の移動平均となっている：MA（移動平均）部分）から成ると表現されています。
よって、一定量の過去の実績データが与えられると、定差方程式のパラメータ　$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_z$　を推定すれば良いこととなります。
勿論、ブラックショールズ方程式の様に一意的に解を求めることはできず、最尤法（真の値への接近法）により推定値として求めることとなります。
最尤法の実際は、対数尤度関数、イノベーションアルゴリズム、勾配ベクトルを用いた接近（DFP 法）等を用いて、約１億～５億回程度の繰り返し接近計算を実行することとなり、かなり高度で複雑です。

現実の結果に対する当てはまり性、変化への追従性など優れたパフォーマンスを持つ ARIMA モデルは、パラメータ推定の難しさ、モデリングパターンの多さの点で、ごく限られた専門家のみが扱える方程式であったと言え、まさに実業への適用性が困難であったと思われます。
やっと最近になり、ARIMA モデルの予備知識なく誰でも利用可能な、完全自動処理モデルの実用化が可能となってきました。
今後、様々な実業分野で、現実適合性に優れる ARIMA モデルの適用が進むことが期待されます。


1827年
イギリス
植物学
ブラウン
運動
フーリエ
熱伝導
1822年
フランス
数学・物理学
1905年
アインシュタイン
物理学
1970年
アメリカ
統計学
Box
・
Jenkins
Black
・
Scholes
1973年
アメリカ
経済学
推定解
非構造的
研究者数：少
実業に非浸透
一意解
構造的(因果的)
研究者数：多
実業に浸透
ARIMA
金融工学
当てはまり性：高
現実への追従性
当てはまり性：中
現実との乖離性
多くの課題を抱え、変化の激しい
マネー膨張経済